京都大学数理解析研究所講究録 **1348** (2003) 134-149

一般化 Drinfel'd-Sokolov 階層の相似簡約と affine Weyl 群対称性

菊地哲也 (Tetsuya Kikuchi, 東北大・理)
筧三郎 (Saburo Kakei, 立教大・理)

1 Introduction

本研究は, 野海正俊・山田泰彦による Painlevé 方程式に関する一連の研究, 特に affine Weyl 群の対称性に基づいた $A_l^{(1)}$ 型高階 Painlevé 方程式系 (これを野海・山田系と呼ぶことにする) [1] を拡張し, その対称性や特殊解を調べるものである. これにより, 現時点では野海・山田系には含まれていない Painlevé VI 型方程式などをとらえることも目標としている. ここでは野海・山田系が, modified (principal) Drinfel'd-Sokolov 階層というソリトン系の相似簡約により得られることに注目して, 扱うソリトン系の範囲を広げることにより野海・山田系の拡張を行う. まずランクの低い場合に一変数 $A_l^{(1)}$ 型野海・山田系とソリトン方程式系との関係をまとめておくと,

$$\begin{array}{ccccc} A_1^{(1)} & : & \text{変形 KdV 方程式} & \longrightarrow & \text{Painlevé II} \\ A_2^{(1)} & : & \text{変形 Boussinesq 方程式} & \longrightarrow & \text{Painlevé IV} \\ A_3^{(1)} & : & \text{変形 4-reduced KP 方程式} & \longrightarrow & \text{Painlevé V} \end{array}$$

となっている. ここで矢印は相似簡約の操作を表わす. また, ランクが 4 以上のときは 3 階以上の方程式になる. ソリトン系との対応を与えることにより, Painlevé II の有理解を表わす Yablonskii-Vorob'ev 多項式は変形 KdV 方程式の有理解を表わす 2-reduced Schur 関数から, また Painlevé IV の有理解を表わす岡本多項式も, 変形 Boussinesq 方程式の有理解である 3-reduced Schur 関数から相似簡約により得られることが説明できる. そこでこの相似簡約という操作に注目して, 扱うソリトン系を一般化 Drinfel'd-Sokolov 階層 [2] まで広げてみるのだが, ひとつの答えとして, 池田岳との共同研究により $A_2^{(1)}$ 型一般化 Drinfel'd-Sokolov 階層のひとつである, 変形矢嶋・及川階層の相似簡約で Painlevé V が得られることがわかった [3]. ここではさらに, 野海・山田系への affine Weyl 群作用をソリトン系への対称性に持ち上げるという問題も考える. すなわち, 次の表の ? を埋めよ, という問題を考える.

$$
\begin{array}{ccc}
\text{一般化 Drinfel'd-Sokolov 階層} & \longrightarrow & \boxed{?\ ?\ ?} \\
\cup & \boxed{\text{相似簡約}} & \cup \\
\text{Dolinfel'd-Sokolov 階層} & \longrightarrow & \text{野海・山田系} \\
\Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{?\ ?\ ?} & \longrightarrow & \text{Bäcklund 変換} \simeq \widetilde{W}
\end{array}
$$

本稿では, ここでいう一般化 Drinfel'd-Sokolov 階層のさらなる拡張を行い, この結果得られる微分型非線型 Schrödinger 方程式と Painlevé 第 IV 方程式についての研究報告を行う.

2 背景および主結果

まず, われわれの結果について述べる前に, 非線形 Schrödinger 方程式と Painlevé IV 型方程式について整理しておく. 非線形 Schrödinger 方程式

$$
\mathrm{i}q_t = \frac{1}{2}q_{xx} + 4|q|^2 q \tag{NLS}
$$

に, 微分に依存する非線形項をつけ加えた可積分な方程式を微分型非線形 Schrödinger 方程式と呼ぶ. 我々が扱う方程式は

$$
\mathrm{i}q_t = \frac{1}{2}q_{xx} + 2\mathrm{i}q^2\bar{q}_x + 4|q|^4 q \tag{∂NLS}
$$

というものであり, Gerdjikov-Ivanov により与えられた [4]. これらの非線形偏微分方程式と Painlevé IV 方程式

$$
y_{xx} = \frac{(y_x)^2}{2y} + \frac{3}{2}y^3 + 4xy^2 + 2(x^2+\eta_1)y + \frac{\eta_2}{y} \tag{$\mathrm{P_{IV}}$}
$$

(η_1, η_2 はパラメータ) に関して, 本研究に直接関連する結果を列挙する.

- Ablowitz-Ramani-Segur [5]

  (∂NLS) において未知関数 q の次数を $[q]=1$, 変数 x, t の次数を $[x]=-2$, $[t]=-4$ とすると, この方程式は 5 次の同次方程式になっている. そこで, 解 $q=q(x,t)$ に同次条件

  $$
  q(\lambda^2 x, \lambda^4 t) = \lambda^{-1} q(x,t) \tag{1}
  $$

  を課すと, q は一変数の関数とみなせる.

  $$
  q(x,t) = (2t)^{-1/4} Q(\xi), \quad \xi := (2t)^{-1/2} x
  $$

  とおき, $Q(\xi) = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$ とおけば, $y = \rho^2$ は ($\mathrm{P_{IV}}$) でパラメータが退化したものを満たす.

- Jimbo-Miwa [6]

  スペクトル保存変形とモノドロミー保存変形の関連の研究で, (P_{IV}) の変形方程式系

$$\frac{\partial Y}{\partial z}=A(z)Y,\quad \frac{\partial Y}{\partial x}=B(z)Y, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}A(z)=&z\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&u\\2(v-\theta_0-\theta_\infty)/u&-x\end{pmatrix}+\frac{1}{z}\begin{pmatrix}-v+\theta_0&-uy/2\\2v(v-2\theta_0)/uy&v-\theta_0\end{pmatrix}\\B(z)=&z\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&u\\2(v-\theta_0-\theta_\infty)/u&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

  の両立条件としての記述が, (NLS) の Lax 表示に相似条件を課したものであることを示した. また, (2) の Schlesinger 変換として離散方程式を導いた.

- Okamoto [7]

  (P_{IV}) を, ハミルトニアン

$$H=2qp^2-(q^2+2xq+2\kappa_0)p+\kappa_\infty q.$$

  に関する正準方程式

$$q'=\frac{\partial H}{\partial p},\qquad p'=-\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{3}$$

  で表わし, $A_2^{(1)}$ 型 affine Weyl group $W(A_2^{(1)})$ 対称性を示した.

- Grammaticos-Ramani [8]

  (P_{IV}) の Lax 表示 (2) に関する Schlesinger 変換により離散 Painlevé I 方程式

$$X_{n-1}+X_n+X_{n+1}=x+\frac{\nu_1 n+\nu_2+(-1)^n\nu_3}{X_n} \tag{dPI}$$

  を導いた. この方程式は, 連続極限で Painlevé I 型方程式 ($u''=6u^2+x$) に移る.

- Noumi-Yamada [9]

  (P_{IV}) の Hamiltonian 表示 (3) の不変因子に注目して, (P_{IV}) の対称形式

$$\begin{aligned}f_0'&=f_0(f_1-f_2)+\alpha_0,\\f_1'&=f_1(f_2-f_0)+\alpha_1,\\f_2'&=f_0(f_0-f_1)+\alpha_2\end{aligned} \tag{4}$$

  を与え, (P_{IV}) の拡大 affine Weyl 群 $\widetilde{W}(A_2^{(1)})$ 対称性を定式化し, この作用を用いて離散 Painlevé 方程式を得た.

もうひとつ, 特殊解の観点から調べても, これらの方程式の共通点が浮かび上がる. Painlevé IV には Hermite 多項式で記述される有理解があるが, 文献 [9] に説明されているように, これは長方形の Young 図形に対応する Schur 関数の相似簡約としてとらえられる一方, Ikeda-Yamada による [10] では, 非線形 Schurödinger 方程式の有理解としてやはり長方形の Young 図形に対応する Schur 関数が現れる. また, Kakei-Sasa-Satsuma による (∂NLS) を含む, 一般化微分型非線形 Schurödinger 方程式の行列式解 (double Wronskian 解) [11] と Ohta-Kajiwara-Satsuma による (dPI) の行列式解 [12] も, Schur 多項式を用いた多項式解として, Hermite 多項式によって表わされる有理解が得られる.

本研究では以上の結果を一般化 Drinfel'd-Sokolov 階層の視点から統一的に説明することを試みるだが, 実際にはこのソリトン方程式系の一般論も拡張する必要があり, その成功により上に挙げた結果の関連が明らかになった. 我々の主結果をまとめると, $A_1^{(1)}$ の場合,

- 一般化 Drinfel'd-Sokolov 階層の拡張
- Soliton 方程式への (拡大) affine Weyl 群作用の持ちあげ
- 相似簡約の Lie 代数的な記述

に成功した.

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{微分型 NLS} & \rightarrow & \boxed{\text{相似簡約}} & \rightarrow & \begin{array}{l}\text{Painlevé IV}\\ \text{(2-parameters)}\end{array} \\
\Uparrow & & & & \Uparrow \\
\text{Bäcklund 変換} & \simeq & \widetilde{W}(A_1^{(1)}) & \simeq & \text{Bäcklund 変換} \\
 & & \cup & & \cup \\
 & & \text{並進} & \simeq & \text{離散 Painlevé I}
\end{array}
$$

本稿では, 特殊解と離散系についての説明は省略させてもらい, 上の 3 つの主結果について説明する.

3 微分型非線形 Schrödinger 階層の構成

以後, 微分型非線形 Schrödinger 方程式を, 連立系

$$
\begin{cases}
q_t = \dfrac{1}{2}q_{xx} - 2q^2 r_x - 4q^3 r^2 \\
r_t = -\dfrac{1}{2}r_{xx} - 2r^2 q_x + 4r^3 q^2
\end{cases}
$$

として考える．ここで $r=\bar{q}$ とすれば Gerdjikov-Ivanov 方程式 (∂NLS) になる．この方程式の Lax 表示は

$$\frac{\partial \Psi(z)}{\partial x}=B_1(z)\Psi(z), \quad \frac{\partial \Psi(z)}{\partial t}=B_2(z)\Psi(z), \tag{5}$$

$$\begin{aligned} B_1(z)&=z\begin{pmatrix}1&0\\2r&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2qr&-2q\\0&-2qr\end{pmatrix},\\ B_2(z)&=z^2\begin{pmatrix}1&0\\2r&-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2qr&-2q\\-r'&-2qr\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}q'r-qr'-2q^2r^2&-q'\\0&qr'-q'r+2q^2r^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

で与えられるのだが, この表示が, 一般化 Drinfel'd-Sokolov 階層の拡張として構成されることを示す.

3.1 準備

まず, 記号の準備をする．Lie 環 $\mathfrak{sl}_2=\mathbb{C}F\oplus\mathbb{C}H\oplus\mathbb{C}E$ の基本関係を

$$[H,E]=2E, \quad [H,F]=-2F, \quad [E,F]=H$$

で, affine Lie 環 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ を

$$\widehat{\mathfrak{sl}}_2=\mathfrak{sl}_2\otimes\mathbb{C}[z,z^{-1}]\oplus\mathbb{C}c\oplus\mathbb{C}d,$$

基本関係を

$$\begin{aligned} &[X\otimes z^m, Y\otimes z^n]=[X,Y]\otimes z^{m+n}+m\delta_{m+n,0}(X,Y)c,\\ &[\widehat{\mathfrak{sl}}_2,c]=0, \quad [d,X\otimes z^n]=nX\otimes z^n \qquad (X,Y=E,F,H)\end{aligned}$$

で定める．また $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の Chevalley generators を

$$e_0=F\otimes z^1, \quad f_0=E\otimes z^{-1}, \quad h_0=c-H\otimes z^0 \tag{6}$$

$$e_1=E\otimes z^0, \quad f_1=F\otimes z^0, \quad h_1=H\otimes z^0 \tag{7}$$

とする．ソリトン方程式は, 与えられた affine Lie 環の $\mathbb{Z}$-gradation と Heisenberg subalgebra を用いて構成することができる．まず, $\mathbb{Z}$-gradation

$$\widehat{\mathfrak{sl}}_2=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)_n \tag{8}$$

であるが, $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の場合, homogeneous gradation と principal gradation という 2 通りの次数付けがあり, それぞれの次数は次のように数えることができる.

$$[d_\sharp,(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)_n]=n(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)_n \quad (\sharp=\mathrm{h\ or\ p}).$$

ここで homogeneous gradation は $d_{\mathrm{h}} = d$ で,

$$[d_{\mathrm{h}}, X \otimes z^n] = nX \otimes z^n,$$

すなわち, Laurent 多項式の次数による次数付けであり, principal gradation は $d_{\mathrm{p}} = 2d + \frac{1}{2}H \otimes z^0$, すなわち, Chevalley generators (6), (7) の次数を

$$[d_{\mathrm{p}}, e_j] = e_j, \quad [d_{\mathrm{p}}, f_j] = -f_j, \quad [d_{\mathrm{p}}, h_j] = 0, \quad (j = 0, 1)$$

と数えたものである. 次に $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の Heisenberg 部分 Lie 環 $\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}\Lambda_n \oplus \mathbb{C}c$ を

$$[\Lambda_m, \Lambda_n] = m\delta_{m+n,0}c$$

なる関係式で定める. これも, 上の次数付けに対応した基底をもつ 2 種類の同型類があり, それぞれの基底は

$$\begin{aligned} &\text{homogeneous}: \ \Lambda_n^{(\mathrm{h})} = \frac{1}{\sqrt{2}} H \otimes z^n \\ &\text{principal}: \ \Lambda_n^{(\mathrm{p})} = E \otimes z^{n-1} + F \otimes z^n \end{aligned}$$

で与えられる. これらの生成元は, 各 gradation に対応して

$$[d_{\mathrm{h}}, \Lambda_n^{(\mathrm{h})}] = n\Lambda_n^{(\mathrm{h})}, \qquad [d_{\mathrm{p}}, \Lambda_n^{(\mathrm{p})}] = (2n-1)\Lambda_n^{(\mathrm{p})}$$

を満たしている. 以下では $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ のレベル 0 の実現

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = 0 \tag{9}$$

を積極的に用いる.

3.2 Hierarchy of soliton equations

$\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の $\mathbb{Z}$-gradation に対応して, exp で生成される affine Lie 群 $\widehat{G}$ も

$$\widehat{G} = \widehat{G}_- \cdot \widehat{G}_+, \qquad \widehat{G}_- = \exp\Bigl(\bigoplus_{j<0} (\widehat{\mathfrak{sl}}_2)_j\Bigr), \quad \widehat{G}_+ = \exp\Bigl(\bigoplus_{j \geq 0} (\widehat{\mathfrak{sl}}_2)_j\Bigr)$$

と分解されることを用いて, 以下のようにして方程式系を構成する. まず, 初期値を $X \in \widehat{\mathfrak{sl}}_2$ に対して $g(0) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{e}^X$ で与え, $t = (t_1, t_2, \dots)$ に関する時間発展を, Heisenberg 部分 Lie 環の生成元により

$$g(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \exp\Bigl(\sum_{n>0} t_n \Lambda_n\Bigr) g(0) \tag{10}$$

で定義する．この $g(t)$ を Gauss 分解

$$g(t)=\{g_{<0}(t)\}^{-1}\cdot g_{\geq 0}(t) \qquad g_{<0}(t)\in\widehat{G}_-,\quad g_{\geq 0}(t)\in\widehat{G}_+$$

することにより, t の未知関数である $g_{<0}(t)$ の成分はソリトン方程式を満たすのである．それは, (10) より $g(t)$ について

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t_n}=\Lambda_n g(t) \qquad (n=1,2,\dots)$$

がわかるので, この両辺を Gauss 分解することにより $g_{<0}(t), g_{\geq 0}$ が

$$\frac{\partial g_{<0}}{\partial t_n}=B_n g_{<0}-g_{<0}\Lambda_n, \qquad B_n \overset{\text{def}}{=} \left(g_{<0}\Lambda_n g_{<0}^{-1}\right)_{\geq 0} \tag{11}$$

$$\frac{\partial g_{\geq 0}}{\partial t_n}=B_n g_{\geq 0} \tag{12}$$

という偏微分方程式をみたすことがわかる．(11) を Sato-Wilson 方程式という．これより

$$\Psi \overset{\text{def}}{=} g_{<0}\cdot\exp\Big[\sum_{j>0} t_j\Lambda_j\Big]$$

と定義すれば, Lax 方程式

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t_n}=B_n\Psi \tag{13}$$

も得られる．

この構成において, 特に時間発展を homogeneous Heisenberg 部分 Lie 環に関するもの

$$\Lambda_n=\Lambda_n^{(\mathrm{h})}=\frac{1}{\sqrt{2}}H\otimes z^n,$$

Gauss 分解を principal gradation に関するもの

$$g_{<0}(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ r & 1\end{pmatrix}+z^{-1}\begin{pmatrix}v_1 & q\\ w_2 & v_2\end{pmatrix}+z^{-2}\begin{pmatrix}* & w_1\\ * & *\end{pmatrix}+\cdots, \tag{14}$$

$$g_{\geq 0}(t):=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\phi} & \mathrm{e}^{\phi}a\\ 0 & \mathrm{e}^{-\phi}\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}c_1 & d_1\\ \mathrm{e}^{-\phi}b & c_2\end{pmatrix}+z^2\begin{pmatrix}* & *\\ d_2 & *\end{pmatrix}+\cdots \tag{15}$$

とした場合が微分型非線形 Schrödinger 階層である．このとき $x:=t_1, t:=t_2$ とおき, ∂_x を $'$ で表わすと, (11), (12) より

$$\frac{\partial q}{\partial x}=2(w_1-qv_2+q^2r), \quad \frac{\partial r}{\partial x}=-2(w_2-rv_1+qr^2) \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{-2\phi}b\right)=2r-4qr\mathrm{e}^{-2\phi}b, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{e}^{-2\phi}b\right)=-r'-2(q'r-qr'-2q^2r^2)\mathrm{e}^{-2\phi}b, \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{2\phi}a\right)=-2q+4qr\mathrm{e}^{2\phi}a, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{e}^{2\phi}a\right)=-q'+2(q'r-qr'-2q^2r^2)\mathrm{e}^{2\phi}a \tag{18}$$

などが成り立つ. 従って

$$B_1(z) = z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2r & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2qr & -2q \\ 0 & -2qr \end{pmatrix},$$
$$B_n(z) = z^n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2r & -1 \end{pmatrix} + \cdots$$

$(n = 1, 2, \ldots)$ も全て q, r とその微分のみで表わされることも確認される.

3.3 一般化 Drinfel'd-Sokolov 階層の拡張

上の構成が, 実は一般化 Drinfel'd-Sokolov 階層の拡張になっている. そのことを見るため前節の議論をふり返ってみると, 時間発展と, Gauss 分解において

- 時間発展 $g(t) = \exp\Bigl(\sum_{n>0} t_n \Lambda_n\Bigr) g(0)$ における Heisenberg subalgebra の選び方

$$\Lambda_n^{(\mathrm{p})} \text{ (principal)} \quad \text{or} \quad \Lambda_n^{(\mathrm{h})} \text{ (homogeneous)}$$

- Gauss 分解 $g(t) = \{g_{<0}(t)\}^{-1} g_{\geq 0}(t)$ における次数付けの選び方

$$d_{\mathrm{p}} = 2d + \frac{1}{2} H \otimes z^0 \quad \text{or} \quad d_{\mathrm{h}} = d$$

という自由度がある. この選び方に応じて 4 種類の方程式系が得られるが, それらは

Heisenberg subalg. \ Gauss 分解	(p)	(h)
(p)	変形 KdV	KdV
(h)	**∂NLS**	NLS

となっている. 従来は, 時間発展を homogeneous gradation に関するもので行ったときは, Gauss 分解もそれに応じて homogeneous なもので行い, その結果, $A_1^{(1)}$ の場合は

$$g_{<0}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z^{-1}\begin{pmatrix} * & q \\ \hat{r} & * \end{pmatrix} + \cdots$$

となり, $\hat{r} = \overline{q}$ のもとで, q が微分型でない非線形 Schrödinger 方程式 (NLS) をみたすのだった.

一般の affine Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ に付随するソリトン系については Kac-Peterson [13] により, $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Heisenberg 部分 Lie 環の同型類は, 有限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Weyl 群の共役類と 1 対 1 に対応することが示されており, それに応じて頂点作用素表現によりソリトン系が構成できる.

一方, $\mathfrak{g}$ への内部自己同型としての Weyl 群の作用から $\mathfrak{g}$ を固有空間に分解して, affine Lie 環の次数付けを定めることができる．すなわち

$$
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{g}\text{ の Weyl 群}\\ \text{の共役類}\end{array}\right\} \longmapsto \left\{\ \widehat{\mathfrak{g}}\text{ の }\mathbb{Z}\text{-gradation}\ \right\}
$$
$$
\longleftrightarrow \left\{\ \widehat{\mathfrak{g}}\text{ の Heisenberg subalgebra}\ \right\}/\simeq
$$

という対応がある．de Groot らによる一般化 Drinfel'd-Sokolov 階層の構成 [2] は, Weyl 群の共役類に対応するソリトン系の Lax 表示を与えるものであるが, Heisenberg 部分 Lie 環に対応する共役類の代表元を w, Gauss 分解に対応する共役類の代表元を w' としたとき, Bruhat order $\geq$ に関して

$$w \geq w'$$

という条件を課している．しかし前節で見たように, この仮定を除いても方程式系の構成に問題はおこらないのである．なお, [2] では, はじめに Lax 表示 (13) の B_n の形を決めてから "対角化" をしており, 前節の議論と全く等しいわけではない.

4　2 種類の affine Weyl 群対称性

Affine Weyl 群 $W(A_1^{(1)}) = \langle s_0, s_1\rangle$ を

$$s_j = \exp(f_j)\exp(-e_j)\exp(f_j) \qquad (j=0,1)$$

で実現する．ここで, e_j, f_j は Chebelley generators (6), (7) である．これは $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の可積分表現に作用する．実現 (9) のもとでは

$$s_0 = \begin{pmatrix} & z^{-1} \\ -z & \end{pmatrix}, \quad s_1 = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \tag{19}$$

と表わされる．これらを用いて 2 種類の s_j $(j=0,1)$ の作用を構成することができる．図式的に表わすと次のようになる.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & g(0) & & \\
 & \text{左作用}\swarrow & & \searrow\text{右作用} & \\
s_j^{-1}g(0) & & & & g(0)s_j \\
\downarrow & & \text{時間発展} & & \downarrow \\
\mathrm{e}^{\sum t_n\Lambda_n}s_j^{-1}g(0) & & & & \mathrm{e}^{\sum t_n\Lambda_n}g(0)s_j \\
|| & & \text{Gauss 分解} & & || \\
s_j^{\mathrm{L}}(g_{<0})^{-1}\cdot s_j^{\mathrm{L}}(g_{\geq 0}) & & & & s_j^{\mathrm{R}}(g_{<0})^{-1}\cdot s_j^{\mathrm{R}}(g_{\geq 0})
\end{array}
$$

4.1　右作用

ここで定義する右作用が, 野海・山田系への affine Weyl 作用のソリトン系への持ちあげになることを後に示す. これは (19) の s_i を用いて, $g(t)s_i$ の Gauss 分解で定義する:

$$g(t) = g_{<0}^{-1} g_{\geq 0} \ \mapsto\ g(t)s_i = g_{<0}^{-1} g_{\geq 0} s_i = (s_i^{\mathrm{R}}(g_{<0}))^{-1} s_i^{\mathrm{R}}(g_{\geq 0}).$$

実現 (9), (19) を用いてこれを実行すると, まず

$$\begin{aligned} g_{\geq 0}s_0 &= z^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{\phi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_1 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\phi}b \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{\phi}a & * \\ -\mathrm{e}^{-\phi} & d_2 \end{pmatrix} + z^2\begin{pmatrix} -d_1 & * \\ -c_2 & * \end{pmatrix} + \cdots, \\ g_{\geq 0}s_1 &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\phi}a & -\mathrm{e}^{\phi} \\ \mathrm{e}^{-\phi} & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} d_1 & -c_1 \\ c_2 & -\mathrm{e}^{-\phi}b \end{pmatrix} + z^2\begin{pmatrix} * & * \\ * & -d_2 \end{pmatrix} + \cdots \end{aligned}$$

となるので, この部分の Gauss 分解

$$g_{\geq 0}s_i = (g_{\geq 0}s_i)_{<0}^{-1} \cdot (g_{\geq 0}s_i)_{\geq 0}$$

を行って, $g_{<0}$, $g_{\geq}s_i$ のそれぞれに左から

$$G_0 := (g_{\geq 0}s_0)_{<0} = \begin{pmatrix} 1 & -z^{-1}/\mathrm{e}^{-2\phi}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_1 := (g_{\geq 0}s_1)_{<0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\mathrm{e}^{2\phi}a & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

を掛ければ $s_i^{\mathrm{R}}(g_{<0})$, $s_i^{\mathrm{R}}(g_{\geq 0})$ が得られる. この G_i $(i = 0, 1)$ の求め方は, これらが $\widehat{G}_{<0}$ に属すことより $G_i = 1 + (G_i)_{-1} + (G_i)_{-2} + \ldots$ とおき, $g_{\geq 0}s_i$ も次数ごとに分解して $G_i g_{\geq 0} s_i$ が $\widehat{G}_{\geq 0}$ に属するように, $(G_i)_j$ を次数ごとに順に決定するのである. よって

$$\begin{aligned} s_0^{\mathrm{R}}(g_{\geq 0}) = G_0 g_{\geq 0} s_0 &= \begin{pmatrix} 1/\mathrm{e}^{-\phi}b & c_1 - d_2/\mathrm{e}^{-2\phi}b \\ 0 & \mathrm{e}^{-\phi}b \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{\phi}a + c_2/\mathrm{e}^{-2\phi}b & * \\ -\mathrm{e}^{-\phi} & d_2 \end{pmatrix} + \cdots, \\ s_0^{\mathrm{R}}(g_{<0}) = G_0 g_{<0} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} + z^{-1}\begin{pmatrix} v_1 - r/\mathrm{e}^{-2\phi}b & q - 1/\mathrm{e}^{-2\phi}b \\ w_2 & v_2 \end{pmatrix} + \cdots, \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} s_1^{\mathrm{R}}(g_{\geq 0}) = G_1 g_{\geq 0} s_1 &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\phi}a & -\mathrm{e}^{\phi} \\ 0 & 1/\mathrm{e}^{\phi}a \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} d_1 & -c_1 \\ c_2 - d_1/\mathrm{e}^{2\phi}a & -b_2 + c_1/\mathrm{e}^{2\phi}a \end{pmatrix} + \cdots, \\ s_1^{\mathrm{R}}(g_{<0}) = G_1 g_{<0} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r - 1/\mathrm{e}^{2\phi}a & 1 \end{pmatrix} + z^{-1}\begin{pmatrix} v_1 & q \\ w_2 - v_1/\mathrm{e}^{2\phi}a & v_2 - q/\mathrm{e}^{2\phi}a \end{pmatrix} + \cdots \end{aligned}$$

となる. その結果, ∂NLS の解への作用は

$$\begin{aligned} s_0^{\mathrm{R}} &: q \mapsto q - \frac{1}{\mathrm{e}^{-2\phi}b}, \quad r \mapsto r \\ s_1^{\mathrm{R}} &: q \mapsto q, \qquad\qquad\ \ r \mapsto r - \frac{1}{\mathrm{e}^{2\phi}a} \end{aligned}$$

となることがわかる．ここに出てくる関数 $1/\mathrm{e}^{-2\phi}b$, $1/\mathrm{e}^{2\phi}a$ の逆数は (17), (18) を満たすことに注意. このように, ソリトン方程式への Weyl 群の作用は ∂NLS の解のみでは表わすことができず, 微分方程式 (17), (18) を通して記述される.

なお, 微分作用素 $\partial_{t_n}-B_n$ への作用を,

$$\frac{\partial}{\partial t_n}-s_i^{\mathrm{R}}(B_n)=s_i^{\mathrm{R}}(g_{<0})\left(\frac{\partial}{\partial t_n}-\Lambda_n\right)(s_i^{\mathrm{R}}(g_{<0}))^{-1}=G_i\left(\frac{\partial}{\partial t_n}-B_n\right)G_i^{-1}$$

という gauge 変換で表わすことができる．また, ここでの議論は, 時間発展を principal にしても homogeneous しても同様に行えることを注意しておく.

4.2 左作用

この作用は, 時間発展を homogeneous Heisenberg 部分 Lie 環で行ったときに意味をもつ. 初期値 $g(0)$ に s_0, s_1 を左から作用させて時間発展を行うと,

$$\Lambda_n^{(\mathrm{h})}s_i=-s_i\Lambda_n^{(\mathrm{h})}\qquad(n\in\mathbb{Z},\ i=0,1)$$

となることより

$$\exp\Bigl(\sum_{n\geq 0}t_n\Lambda_n\Bigr)s_i^{-1}g(0)=s_i^{-1}\exp\Bigl(\sum_{n\geq 0}(-t_n)\Lambda_n\Bigr)g(0)=s_i^{-1}g(-t)\qquad(i=0,1)$$

となる．ここで $-t=(-t_1,-t_2,\dots)$ である．そこで, affine Wayl 群の左作用を $s_i^{-1}g(-t)$ の Gauss 分解で定義する:

$$g(t)=g_{<0}^{-1}g_{\geq 0}\ \mapsto\ s_i^{-1}g(-t)=(g_{<0}(-t)s_i)^{-1}g_{\geq 0}(-t)=(s_i^{\mathrm{L}}(g_{<0}))^{-1}s_i^{\mathrm{L}}(g_{\geq 0}).$$

ここでも実現 (9), (19) を用いて具体的に実行すると, まず

$$\begin{aligned}g_{<0}(-t)s_0&=z\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-q&0\\-v_2&0\end{pmatrix}+z^{-1}\begin{pmatrix}-w_1&1\\ *&r\end{pmatrix}+z^{-2}\begin{pmatrix}*&v_1\\ *&w_2\end{pmatrix}+\cdots,\\ g_{<0}(-t)s_1&=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-r\end{pmatrix}+z^{-1}\begin{pmatrix}q&-v_1\\v_2&-w_2\end{pmatrix}+z^{-2}\begin{pmatrix}w_1&*\\ *&*\end{pmatrix}+\cdots\end{aligned}$$

となる (行列成分の変数は $-t$ に変換されたもの) ので, これを,

$$g_{<0}(-t)s_i=(g_{<0}(-t)s_i)_{\geq 0}^{-1}\cdot(g_{<0}(-t)s_i)_{<0}$$

と Gauss 分解する．そこで $g_{<0}(-t)s_i$, $g_{\geq 0}(-t)$ それぞれに, 左から

$$X_0:=(g_{<0}(-t)s_0)_{\geq 0}=\begin{pmatrix}-1/q&0\\z&-q\end{pmatrix},\quad X_1:=(g_{<0}(-t)s_1)_{\geq 0}=\begin{pmatrix}-r&1\\0&-1/r\end{pmatrix}\tag{21}$$

をかければ, s_i^{L} の作用が記述できる (X_i の成分も $-t$ に変換されたものである). この X_i の構成も, G_i (20) 同様, 次数ごとに決定できる. よって

$$s_0^{\mathrm{L}}(g_{<0}) = X_0 g_{<0}(-t) s_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ qv_2 - w_1 & 1 \end{pmatrix} + z^{-1} \begin{pmatrix} w_1/q & -1/q \\ * & -qr + v_1 \end{pmatrix} + \cdots, \tag{22}$$

$$s_0^{\mathrm{L}}(g_{\geq 0}) = X_0 g_{\geq 0}(-t) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{\phi}/q & -\mathrm{e}^{\phi}a/q \\ 0 & -\mathrm{e}^{-\phi}q \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -c_1/q & -d_1/q \\ \mathrm{e}^{\phi} - \mathrm{e}^{-\phi}bq & \mathrm{e}^{\phi}a - c_2 q \end{pmatrix} + \cdots \tag{23}$$

となる. (22) の z^{-2} まで見ると $s_0(w_1) = -v_1/q$ もわかる. これより r の s_0^{L} による像は $qv_2 - w_1$ であるが, (16) が成り立つので q, r のみで表すことができる. さらに

$$s_1^{\mathrm{L}}(g_{<0}) = X_1 g_{<0}(-t) s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/r & 1 \end{pmatrix} + z^{-1} \begin{pmatrix} -qr + v_2 & rv_1 - w_2 \\ -v_2/r & w_2/r \end{pmatrix} + \cdots, \tag{24}$$

$$s_1^{\mathrm{L}}(g_{\geq 0}) = X_1 g_{\geq 0}(-t) = \begin{pmatrix} -r\mathrm{e}^{\phi} & \mathrm{e}^{-\phi} - r\mathrm{e}^{\phi}b \\ 0 & -\mathrm{e}^{-\phi}/r \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\phi}b - rc_1 & c_2 - rd_1 \\ -\mathrm{e}^{-\phi}b/r & -c_2/r \end{pmatrix} + \cdots \tag{25}$$

となるが, ここでも (16) より, s_1 による q の像は q, r のみで表せる. その結果は

$$s_0^{\mathrm{L}} : \begin{cases} q(t) & \mapsto -\dfrac{1}{q(-t)}, \\ r(t) & \mapsto q(-t)^2 r(-t) - \dfrac{q'(-t)}{2} \end{cases}$$

$$s_1^{\mathrm{L}} : \begin{cases} q(t) & \mapsto q(-t)r(-t)^2 + \dfrac{r'(-t)}{2} \\ r(t) & \mapsto -\dfrac{1}{r(-t)} \end{cases}$$

となる.

5 Painlevé IV への相似簡約

5.1 Painlevé IV の導出

初期値 $g(0) = g(z;0)$ に対して相似条件

$$g(\lambda z; 0) = \lambda^{\alpha\Lambda_0^{(\mathrm{h})}} g(z;0) \lambda^{\beta\Lambda_0^{(\mathrm{h})}} \Leftrightarrow [d, g(0)] = \alpha\Lambda_0^{(\mathrm{h})} g(0) + g(0)\beta\Lambda_0^{(\mathrm{h})}$$

を要請する. このような $g(0)$ の homogeneous Heisenberg 部分 Lie 環による時間発展を行うと, $\Lambda_n^{(\mathrm{h})} = \Lambda_n^{(\mathrm{h})}(z)$ は

$$\Lambda_n^{(\mathrm{h})}(\lambda z) = \lambda^n \Lambda_n^{(\mathrm{h})}(z)$$

を満たすので $g(t) = g(z;t)$ は, 相似条件

$$
\begin{aligned}
g(\lambda z;t) &= \lambda^{\alpha\Lambda_0^{(\mathrm{h})}} g(z;\tilde{t})\lambda^{\beta\Lambda_0^{(\mathrm{h})}} \qquad \tilde{t} := (\lambda t_1, \lambda^2 t_2, \dots) \\
\Leftrightarrow [d, g(t)] &= \Big(\alpha\Lambda_0^{(\mathrm{h})} + \sum_{n>0} n t_n \Lambda_n^{(\mathrm{h})}\Big) g(t) + g(t)\beta\Lambda_0^{(\mathrm{h})}
\end{aligned}
$$

を満たす. このような $g(t)$ を Gauss 分解することにより, $g(t)_{<0}$, $g(t)_{\geq 0}$ の相似条件

$$
g_{<0}(\lambda z;t) = \lambda^{\alpha\Lambda_0^{(\mathrm{h})}} g_{<0}(z;\tilde{t})\lambda^{-\alpha\Lambda_0^{(\mathrm{h})}}, \quad g_{\geq 0}(\lambda z;t) = \lambda^{\alpha\Lambda_0^{(\mathrm{h})}} g_{\geq 0}(z,\tilde{t})\lambda^{\beta\Lambda_0^{(\mathrm{h})}} \tag{26}
$$

が得られる. 特に

$$
\begin{gathered}
q(\tilde{t}) = \lambda^{-1-2\alpha} q(t), \quad r(\tilde{t}) = \lambda^{2\alpha} r(t) \\
\mathrm{e}^{\phi}(\tilde{t}) = \lambda^{-\alpha-\beta}\mathrm{e}^{\phi}(t), \quad a(\tilde{t}) = \lambda^{2\beta} a(t), \quad b(\tilde{t}) = \lambda^{-2\beta+1} b(t)
\end{gathered}
$$

等が成り立つ. ここで $\alpha = -1/4$ とした場合が, Ablowitz らの考察した場合 (1) と本質的に同じになる (次数の数え方が 1/2 倍されているだけである). すなわち我々は, 相似条件にパラメータを入れることにより, 後に見るように full parameter の Painlevé IV を得ることができたのである. (26) よりさらにソリトン方程式の相似解の満たす Lax pair

$$
\frac{\partial \Psi(z)}{\partial t_n} = B_n(z)\Psi(z) \quad (n = 1, 2, \dots), \qquad z\frac{\partial \Psi(z)}{\partial z} = M(z)\Psi(z),
$$

ここで,

$$
M(z) \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha\Lambda_0 + \sum_{n>0} n t_n B_n
$$

も導かれる. そこで特に $t_2 = 1/2$, $t_3 = t_4 = \cdots = 0$ と置いて得られる方程式系

$$
\frac{\partial \Psi(z)}{\partial x} = B_1(z)\Psi(z), \quad z\frac{\partial \Psi(z)}{\partial z} = M(z)\Psi(z), \tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
B_1(z) &= z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2r & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi & -2q \\ 0 & -\varphi \end{pmatrix}, \\
M(z) &= z^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2r & -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} x+\varphi & -2q \\ r\psi_0 & -x-\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha+k & q\psi_1 \\ 0 & -\alpha-k \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
\varphi \overset{\mathrm{def}}{=} 2qr, \quad \psi_1 \overset{\mathrm{def}}{=} -2x - q'/q, \quad \psi_0 \overset{\mathrm{def}}{=} 2x - r'/r \\
k \overset{\mathrm{def}}{=} 2xqr + q'r - qr' - 2q^2r^2
\end{gathered}
$$

が Painlevé IV の Lax 表示を与えている. それは, 相似条件より関係式 $\alpha + k = -\beta$ と

$$
\psi_0 - \psi_1 - \varphi - 2x + \frac{\alpha+\beta}{\varphi} = 0 \tag{28}
$$

がわかり, さらに (27) の両立条件より得られる

$$
\begin{aligned}
\varphi' &= -\varphi(\psi_1 + \psi_0), \\
\psi_1' &= 2\psi_1(x+\varphi) + \psi_1^2 - 4\beta, \\
\psi_0' &= -2\psi_0(x+\varphi) + \psi_0^2 - 4\beta + 2,
\end{aligned}
$$

により φ, ψ_1, $-\psi_0$ がそれぞれ $(\mathrm{P_{IV}})$ を満たしていることがわかるからである. 特に, パラメータの対応は

$$
\begin{aligned}
\varphi &: \eta_1 = -\alpha + 3\beta - 1, & \eta_2 &= 2(\alpha+\beta)^2 \\
\psi_1 &: \eta_1 = 2\alpha + 1, & \eta_2 &= -8\beta^2 \\
\psi_0 &: \eta_1 = -2\alpha, & \eta_2 &= -2(2\beta - 1)^2
\end{aligned}
$$

である. ここでは $(\mathrm{P_{IV}})$ の確認は省略して, はじめに述べた結果との比較を行うことにする. パラメータ α, β と Jimbo-Miwa による変形方程式 (2) のモノドロミー指数との対応は,

$$(\theta_\infty, \theta_0) = (-\alpha, -\beta)$$

であり, ψ_1 が Jimbo-Miwa による $(\mathrm{P_{IV}})$ の解に対応する. さらに Okamoto による正準座標 (q,p) (3) との対応は

$$(q,p) = (\varphi, -\psi_1), \quad (-\psi_0, -\varphi)$$

の二組がある. すなわち, 微分型非線形 Schrödinger 方程式まで拡張すると, (NLS) の解と正準座標との関係が理解されるのである. また, 野海・山田の対称形式 (4) の変数 (f_0, f_1, f_2) (Chevelley generator ではない) は, 上の (q,p) から得られる Hamiltonian の不変因子なので

$$(f_0, f_1, f_2) = (\varphi + \psi_1 + 2x, -\varphi, -\psi_1), \quad (\varphi - \psi_0 + 2x, \psi_0, -\varphi)$$

として再現できる.

5.2 Painlevé IV の affine Weyl 群対称性

相似条件を満たすような初期値 $g(0)$ に対して affine Weyl 群の生成元を左右から作用させたとき, $\mathbb{Z}$-gradation の微分 d_p と s_0, s_1 の交換関係より, パラメータ α, β は, 右作用に対しては

$$
\begin{aligned}
s_0^\mathrm{R}(\alpha) &= \alpha, & s_0^\mathrm{R}(\beta) &= -\beta + 1, \\
s_1^\mathrm{R}(\alpha) &= \alpha, & s_1^\mathrm{R}(\beta) &= -\beta,
\end{aligned}
$$

左作用に対しては

$$
\begin{aligned}
s_0^\mathrm{L}(\alpha) &= -\alpha - 1, & s_0^\mathrm{L}(\beta) &= \beta, \\
s_1^\mathrm{L}(\alpha) &= -\alpha, & s_1^\mathrm{L}(\beta) &= \beta,
\end{aligned}
$$

となることはすぐにわかる.

さらに右作用に関しては, 作用を記述するときに現れた関数 $\mathrm{e}^{-2\phi}b, \mathrm{e}^{2\phi}a$ は, 相似条件のもとで Painlevé IV の解 ψ_1, ψ_0 とパラメータ β のみで表すことができる. 具体的には

$$\mathrm{e}^{-2\phi}b = \frac{r\psi_0}{1-2\beta}, \qquad \mathrm{e}^{2\phi}a = \frac{q\psi_1}{2\beta}$$

となる.

ここでは, 時間発展が homogeneous の場合を考察しているのだが, principal の場合に全く同様の議論を行って右作用を Gauge 変換であらわせば, 野海・山田による affine Weyl 群の作用が再現されるのである. こうして $A_1^{(1)}$ の場合,

$$\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{\partial}\textbf{NLS} & \Longrightarrow & \textbf{Painlevé IV} \\
\uparrow & & \uparrow \\
W(A_1^{(1)})\text{-action} & \Longrightarrow & W(A_1^{(1)})\text{-action}
\end{array}$$

という関係がわかった. さらに Dynkin 図形の同型写像にあたる $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の外部自己同型から, "拡大 affine Weyl 群" の作用を構成し, その並進として (dPI) が得られることも示せるのだが, 詳しくは別の機会に譲ることにする.

参考文献

[1] M. Noumi and Y. Yamada, "Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$", Funkcial. Ekvac. **41** (1998), 483-503.

[2] M. F. de Groot, T. J. Hollowood and J. L. Miramontes, "Generalized Drinfel'd-Sokolov hierarchies", Commun. Math. Phys. **145** (1992), 57-84.

[3] T. Kikuchi, T. Ikeda and S. Kakei, "Similarity reduction of the modified Yajima-Oikawa equation", J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 11465-11480.

[4] V.S. Gerdjikov and M.I. Ivanov, "A quadratic pencil of general type and non-linear evolution equations. II. Hierarchies of Hamiltonian structures" (Russian) Bulg. J. Phys. **10** (1983) 130-143.

[5] M. J. Ablowitz, A. Ramani and H. Segur, "A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. II", J. Math. Phys. **21** (1980) 1006-1015.

[6] M. Jimbo, T. Miwa, "Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. III", Physica **4D** (1981) 26-46.

[7] K. Okamoto, "Studies on Painlevé equations III, Second and fourth Painlevé equations P_{II} and P_{IV}", Math. Ann. **275** (1986), 221-255.

[8] B. Grammaticos, A. Ramani: "From continuous Painlevé IV to the asymmetric discrete Painlevé I", J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998) 5787-579.

[9] M. Noumi and Y. Yamada, "Symmetries in the forth Painlevé equations and Okamoto polynomials", Nagoya Math. J. **153** (1999), 53-86.

[10] T. Ikeda, H. Yamada: "Polynomial τ-functions of the NLS-Toda hierarchy and the Virasoro singular vectors", Lett. Math. Phys. **60** (2002) 147-156

[11] S. Kakei, N. Sasa and J. Satsuma: "Bilinearization of a Generalized Derivative Nonlinear Schrödinger equation", J. Phys. Soc. Jpn. **64** (1995) 1519-1523.

[12] Y. Ohta, K. Kajiwara and J. Satsuma: "Bilinear Structure and Exact Solutions of the Discrete Painlevé I Equation", in *Proceedings of the Workshop on Symmetries and Integrability of Difference Equations*, CRM Proceedings and Lecture Notes **9**, AMS, (1996) 265-268.

[13] V. G. Kac and D. H. Peterson, "112 Constructions of the basic representation of the loop group of E_8" In Symposium on anomalies, geometry and topology. W. A. Bardeen, A. R. White (eds). Singapore: World Scientific (1985) 276-298.